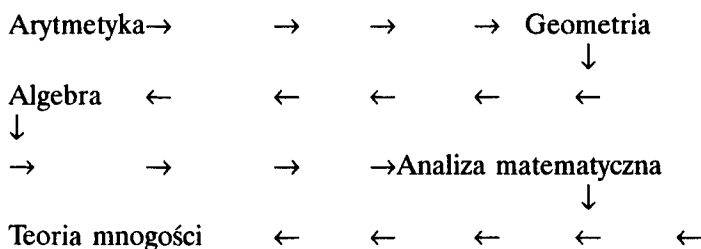


Jarosław Mrozek

Tło i znaczenie „kryzysów” w podstawach matematyki

Słowa kluczowe: rozwój matematyki, sprzeczność, podstawy matematyki, niewspółmierność, wielkości nieskończenie małe, zbiory aktualnie nieskończone

Gdy prześledzimy historię matematyki pod kątem dominujących na danym etapie rozwoju dziedzin matematycznych, to możemy zauważyć swoistą dialektykę zmian zachodzących w tej nauce polegających na tym, że po okresie „panowania” dziedziny reprezentującej matematykę wielkości dyskretnych następuje swoiste „przesunięcie” akcentów w sposobie uprawiania matematyki w stronę matematyki wielkości ciągłych. W dużym uproszczeniu wyglądało to następująco:



Po okresie zajmowania się głównie arytmetyką przez szkołę pitagorejską, w wyniku „kryzysu” spowodowanego odkryciem wielkości niewspółmiernych, nastąpiła długa faza dominacji podejścia geometrycznego. Z czasem rozwój algebry pozwolił na algebraizację (arytmetyzację) tej dziedziny, co zaowocowało powstaniem geometrii analitycznej. Z kolei, z geometrii analitycznej wyrosła analiza matematyczna mająca u swoich podstaw rachunek różniczkowy i całkowy. Problemy, na jakie natrafili twórcy rachunku różniczkowego i całkowego, wiązały się z próbą wyrażania „procesów ciągłych” przy wykorzystaniu wielkości dyskretnych, tzw. nieskończenie małych. Przewycięzenie tego „kryzysu” było

możliwe dzięki poprawnemu zdefiniowaniu pojęcia *ciągłości* i uściśleniu pojęcia *granicy*. Jednocześnie okazało się, że analiza matematyczna operująca pojęciem liczby rzeczywistej „domaga” się operowania zbiorami aktualnie nieskończonymi. Próby zbudowania teorii zbiorów aktualnie nieskończonych zaowocowały kolejnym „kryzysem” w podstawach matematyki.

Tak zwane *kryzysy* były okresami intensywnych badań matematycznych, często odwołujących się do przekonań filozoficznych, dzięki którym uściślano pojęcia, precyzowano metody i dowodzono wielu fundamentalnych twierdzeń. Dlatego warto przedstawić pokrótce, skąd się brały, jak przebiegały, jak je rozwiązywano.

Pierwszą filozoficzną teorią matematyki był pitagoreizm, który rozpatrywał matematykę jako konieczną podstawę wszelkiego innego poznania oraz najbardziej prawdziwą jego część. Jako kierunek filozoficzny pitagoreizm wychodzi poza ramy właściwej filozofii matematyki, ale w jego centrum znajduje się określona koncepcja matematyki i wytłumaczenie istoty wiedzy matematycznej. Pitagorejczycy ograniczyli obszar matematyki do najbardziej abstrakcyjnych – pojmowanych tylko umysłem – bytów. Świadomie więc w swoich rozważaniach ignorowali stosowanie matematyki do rozwiązywania zadań związanych z działalnością materialną, techniczną czy handlową.

W pitagoreizmie można wydzielić dwie strony: praktyczną (pitagorejski obraz życia) i teoretyczną (określony zbiór wiedzy). W pierwszym przypadku chodzi o elementy religijne, pedagogiczne i polityczne. Celem życia pitagorejczyków było wyswobodzenie duszy. Polegało to na wypełnianiu określonego kodeksu moralnego. W złożonym systemie zaleceń regulujących życie pitagorejczyków poczesne miejsce przypadło zajmowaniu się muzyką i badaniami naukowymi. Pitagorejczycy w rozważaniach teoretycznych widzieli środek do osiągania ostatecznych celów życiowych. Zajmowanie się matematyką miało prowadzić do „oczyszczania duszy”, było środkiem do osiągnięcia nieśmiertelności. Matematykę pitagorejczycy „ogłosili” filozofią i religią, a filozofię przekształcili w mistykę liczb i figur geometrycznych. Obiekty matematyczne rozpatrywane w „otocze” mistyki były uznawane za praistotę świata.

Podstawowymi obiektami poznania naukowego u pitagorejczyków były przede wszystkim liczby ciągu naturalnego. Liczby uznawali oni za uniwersalne obiekty, do których da się sprowadzić nie tylko matematyczne konstrukcje, ale także wszystkie różnorodne zjawiska rzeczywistości. Takie podejście opierało się na przekonaniu, iż w poznaniu rzeczywistości istotną rolę odgrywa poznanie proporcji między jej częściami, które wyraża się liczbowo. Pitagorejczycy absolutyzowali ten aspekt poznania i rozszerzyli go na całą rzeczywistość, dochodząc do tezy, że wszystko wyrażalne jest za pomocą matematyki. Wierząc, że twierdzenia matema-

tyczne z racji swej natury stosowalne są do wyrażania stosunków ilościowych, jakie zachodzą między najróżniejszymi zjawiskami: muzycznymi, astronomicznymi, produkcyjnymi, pitagorejczycy poszukiwali rozlicznych liczbowych i geometrycznych analogii stosunków w świecie zewnętrznym, mając nadzieję dojrzeć w nich samą naturę rzeczy. Formy matematyczne (liczby i figury) interpretowane jako ilościowa podstawa rzeczy przekształciły się w uniwersalne narzędzia ich rozumienia. Nauce o liczbach i innych obiektach matematycznych przypadło naczelne i podstawowe miejsce w systemie poznania świata. Fizyczne, metafizyczne, społeczne, etyczne i teoretyczne zagadnienia otrzymały matematyczne „interpretacje”. Proces ich poznawania polegał na ustanowieniu pewnego izomorfizmu, strukturalnej identyczności tych lub innych zjawisk i określonych stosunków matematycznych. Przekonanie o prawdziwości tego czy innego twierdzenia o świecie sprawdzało się przez sprowadzenie go do harmonii liczbowej.

Pierwszy cios dla pitagoreizmu wiąże się odkryciem odcinków niewspółmiernych. Bujny rozwój matematyki tamtego czasu – paradoksalnie – przyczynił się do zanegowania tezy: „wszystko jest liczbą”, odkrywając niewspółmierność boku kwadratu i jego przekątnej, czyli odkrywając stosunek odcinków, który nie da się wyrazić liczbą znaną pitagorejczykom. Pitagorejczycy swobodnie operowali liczbami naturalnymi i stosunkami tych liczb, czyli – jak dziś powiedzielibyśmy – liczbami wymiernymi (dodatnimi). Fakt istnienia wielkości niewymiernych zrywał harmonię między geometrią a arytmetyką, która była zrozumiała sama przez się i była całościową ideologią pitagoreizmu. Pitagorejczycy musieli uznać, że nawet przy wyborze dowolnej jednostki mierzenia (miary) pewne wielkości są niemierzalne, niemożliwe do wyrażenia przy pomocy stosunku liczb naturalnych, a więc nie są wielkościami „dobrze” określonymi. Ale jeżeli LICZBA nie wyraża istoty pewnych geometrycznych stosunków – jest pod tym względem ograniczona, to jej uniwersalność dla wyrażenia jeszcze bardziej złożonych rzeczy jest w większym stopniu wątpliwa. Odkrycie wielkości niewspółmiernych obnażyło ograniczoność (nieadekwatność) pitagorejskich wyobrażeń o liczbie (i innych pojęciach matematycznych) jako ośrodka prawdy i sposobu poznawania istoty rzeczy.

Do czasu odkrycia niewspółmierności geometrię budowano na bazie liczb naturalnych. Można powiedzieć, że pitagorejczycy dokonali arytmetyzacji geometrii, wyrażając własności geometryczne w sposób arytmetyczny. Po utracie zaufania do arytmetyki w myśleniu matematycznym akcent przesuwają się w stronę geometrii. Zaczyna rozwijać się geometryczna algebra, w której liczby rzeczywiste dodatnie zastępuje się odcinkami lub polami, operując nimi na sposób geometryczny.

Arytmetyka znalazła się w „kryzysie” pojęciowym, nie potrafiąc liczbowo ująć pewnych wielkości, więc Grecy zaczęli rozwijać poznanie matematyczne na podstawie geometrycznej. Widać to w *Elementach* Euklidesa. Wkrótce w matematyce antycznej zaczęło dominować nastawienie geometryczne, utrudniając pełny i zgodny ze specyfiką danej dyscypliny rozwój innych gałęzi matematyki.

Równoległe z kryzysem matematyce także w logice ujawniono szereg paradoksów ściśle związanych z nieskończonością, ciągłością, nieciągłością. Chodzi o paradoksy Zenona z Elei. Warto zauważyć, że są one w istocie antypitagorejskie. Ilustrują ograniczoność wyjściowych wyobrażeń pitagoreizmu, w szczególności o tym, że prosta składa się ze zbioru bezwymiarowych punktów. Aporie zenońskie naruszały harmonię między światem arytmetycznym a światem fizycznym, która była podstawą pitagorejskiego pojmowania rzeczywistości.

Pitagorejski pogląd na matematykę i jej relacje ze światem był stanowiskiem stwarzającym pole dla różnych interpretacji. Niezależnie od pitagorejskiego przekonania o matematycznych podstawach bytu stanowisko pitagorejczyków można rozumieć także jako określony sposób uprawiania „nauk przyrodniczych”, jako sposób uzasadniania prawdy przez zwrócenie się do harmonii, spójności, symetrii. W tym sensie pitagoreizm wpłynął na późniejszy rozwój myśli filozoficznej i naukowej aż do XIX wieku.

Drugi kryzys podstaw poznania matematycznego pojawił się na przełomie XVII i XVIII wieku. Zaistniał on w trakcie opracowania podstaw rachunku nieskończenie małych wielkości. (Z pewnego punktu widzenia jest to oczywiście przedłużenie poprzedniego kryzysu, tylko w zmienionej formie). Korzenie tego kryzysu tkwią w dokonaniach Kartezjusza, który wprowadził do matematyki nie tylko układ współrzędnych, ale i wielkości zmienne, czym zapoczątkował podstawy geometrii analitycznej. Dzięki pojęciu wielkości zmiennej mógł powstać rachunek różniczkowy i całkowity, stworzony przez Newtona i Leibniza.

W pracach matematyków XVII wieku różnymi metodami cząstkowymi rozwiązywane były wielocłonowe zadania – znajdowanie powierzchni figur krzywoliniowych, poprowadzenie stycznej do danej krzywej, znajdowanie minimów i maksimów funkcji elementarnych, które dziś odnosimy do rachunku różniczkowego i całkowego. Tymi zagadnieniami zajmowali się również Newton i Leibniz. Ich dokonania zaowocowały podaniem algorytmu pozwalającego w jednakowy sposób rozwiązywać te wszystkie różne, na pierwszy rzut oka, problemy. Ale Newton i Leibniz nie zdołali racjonalnie (niesprzecznie) określić podstawowych pojęć analizy matematycznej. Z filozoficznego punktu widzenia trudność polegała na próbie sprowadzenia wielkości ciągłych do wielkości dyskretnych za pomocą pojęcia wielkości nieskończenie małej.

Podstawowym pojęciem teorii Leibniza było pojęcie różniczki lub nieskończenie małego przyrostu funkcji. Jednocześnie postulował on, że wielkość ta jest na tyle mała, iż pomnożywszy ją przez skończoną wielkość, nie otrzymamy wielkości skończonej. W podstawowym więc określeniu Leibniz wprowadzał obcą elementarnej arytmetyce i zdrowemu rozsądkowi ideę wielkości niearchimedede-

sowej¹. Ta idea była jednakże konieczna dla usprawiedliwienia proponowanego przez niego sposobu wyliczenia różniczki.

W metafizycznym systemie Newtona bazowym pojęciem jest czas, później przestrzeń i ruch. Newton zachowuje te priorytety także przy budowie analizy matematycznej. Algorytm Newtona bazował na pojęciu fluksji (pochodnej we współczesnej terminologii) i obdarzony był tą samą sprzecznością, co rozważania Leibniza. Przy poszukiwaniu fluksji Newton także odrzucał świadomie człony nierówne zeru (choć w ogóle uważał, że w matematyce nie można lekceważyć żadnych wielkości, choćby najmniejszych).

Matematycy wykorzystując wielkości nieskończenie małe, osiągnęli poprawne rozwiązania rozpatrywanych problemów, więc, pomimo że aparat pojęciowy rachunku różniczkowego i całkowego nie był całkiem klarowny, stosowano go z powodzeniem. Przez długi czas wielkości nieskończenie małe używane były bez dostatecznego matematycznego i logicznego uzasadnienia. Takiego uzasadnienia poszukiwano w metafizyce.

Metafizyczne uzasadnienie w nauce polega na dążeniu, by wyprowadzić te lub inne konkretne prawa z fundamentalnych praw przyrody (bytu)². W XVII wieku panowało przekonanie, że filozofia jest „królową nauk” i że wszystkie szczegółowe prawa powinny być wyprowadzane z ogólnych filozoficznych wyobrażeń o materii, przestrzeni, ruchu itp.

Dojście do idei i praw rachunku różniczkowego nastąpiło u Leibniza pod wpływem jego zasad filozoficznych. I tak rozszerzenie pojęcia wielkości poza granice skończoności i wprowadzenie wielkości nieskończenie małych i nieskończenie wielkich występuje jako szczegółowe zastosowanie zasady ciągłości. Nieskończenie małe przedstawia Leibniz jako ciągłe zmniejszanie wielkości skończonej. Na podstawie zasady ciągłości różniczka (wielkość nieskończenie mała) nie ma określonej wielkości, nie jest zerem, ale jest mniejsza od każdej wielkości skończonej, choćby nie wiadomo jak małej. Jednocześnie różniczka to coś swoistego, jakościowo odmiennego od „zwykłej” wielkości. Jest to coś indywidualnego i niepodzielnego. Ten aspekt różniczki jest przejawem *monadycznego* traktowania rzeczywistości. W pracach Leibniza występują różne ujęcia różniczki jako: skrajnie małego odcinka, wielkości „prawie zerowej” mniejszej od każdej wielkości skończonej, ale także idealnej wielkości wykorzystywanej dla dogodności rachunków. „Jeśli ktoś nie dopuszcza – pisze Leibniz – wielkości nieskończonych

¹ Zgodnie z aksjomatem Archimidesa dla dowolnych dwu wielkości a i b istnieje taka liczba N , że $Na > b$.

² Przykładem metafizycznej argumentacji w fizyce może być zasada tłumacząca według Arystotelesa ograniczenia działania pompy hydraulicznej, która brzmi: *przyroda nie znosi próżni*, lub wyjaśnienie zjawiska spadku ciężkich ciał na Ziemię istnieniem centrum wszechświata, ku któremu dążą wszystkie ciała.

lub nieskończenie małych w ścisłym metafizycznym sensie, to może posługiwać się nimi jako idealnymi pojęciami, skracającymi rozumowania [...]”.

Newton wyjaśniając pojęcie nieskończenie małej wielkości, wiąże je z wyobrażeniami o nieskończonej podzielności przestrzeni i czasu, o niepodzielnym atomie. Słowem, uzasadniając koncepcję analizy posługującej się nieskończenie małymi, nie odwołuje się on do środków matematycznych, a w istocie opiera się na rozumowaniu metafizycznym. U Newtona uzasadnienie cząstkowych wyników analizy odbywało się za pomocą podstawowych pojęć jego mechanistycznego poglądu na świat. Okolicznością zaburzającą prawidłowe uzasadnienie analizy było jej ścisłe związanie z mechaniką. Newton rozpatrywał rachunek różniczkowy i całkowy *nie* jako naukę o funkcjach, która może mieć w szczególności zastosowanie w mechanice, ale jako część nauki o ruchu, jako teoretyczną kinematykę. Dwa główne problemy matematycznej analizy newtonowskiej przypominają bardziej rozważania fizyczne. Można bardziej współcześnie wyrazić je następująco:

1. Długość przebytej drogi jest stale (tzn. w każdej chwili) dana; należy znaleźć prędkość ruchu w określonym momencie.
2. Prędkość ruchu jest stale dana, należy znaleźć długość drogi przebytej w określonym czasie.

Oczywiście, Newton odróżnia problem fizyczny od jego sformułowania matematycznego. Wyjaśnia, że np. pojęcia czasu, prędkości stosuje się tylko umownie przy rozpatrywaniu funkcji matematycznych. Tym niemniej aparat matematyki pozostaje ściśle zorientowany na jedną empiryczną interpretację, ze wszystkimi wypływającymi z tego konsekwencjami. Dla Newtona naturalne było zatem, że każda funkcja ciągła ma pochodną, tak jak każdy ruch (o ile zachodzi) posiada prędkość; że każde przybliżanie się do granicy jest monotoniczne, tak jak poruszające się ciało może przybliżać się do określonego punktu tylko z jednej strony.

System pojęciowy może być logicznie uzasadniony nie wcześniej, nim osiągnie określony stopień dojrzałości, bogactwa treściowego i jednoznaczności w fundamentalnych operacjach. Logiczne uzasadnienie rachunku różniczkowego nie było możliwe na bazie tych pojęć, za pomocą których był on rozwijany. W zawartości pojęciowej rachunku różniczkowego występowały braki faktycznie wykluczające możliwość jego uzasadnienia w takiej postaci, jak to było zrobione na początku XIX wieku. Podstawowe z nich to:

- nieobecność prawidłowego rozumienia *różniczki*³. Matematycy pierwszej połowy XVIII wieku różniczkę utożsamiali z przyrostem funkcji, co bezpośrednio prowadziło do wyżej opisanych sytuacji paradoksalnych.
- brak dostatecznie ogólnego pojęcia *funkcji*. Matematycy wychodząc od intuicji geometrycznych czy mechanistycznych wyobrażeń, zawężali pojęcie funkcji do

³ Mówiąc nieprecyzyjnie, ale obrazowo, różniczka jest *główną częścią* przyrostu funkcji. Por. L. Pontriagin, *Metoda nieskończenie małych* (tłum. z ros. Janusz Kaja), Warszawa 1995, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, s. 113–114.

funkcji analitycznej, która daje się wyrazić określoną formułą algebraiczną i która, mówiąc w uproszczeniu, była „niepoprzerywana” i „bez uskoków i kantów”.

- brak ścisłego rozumienia *ciągłości*. Funkcjonowało ono w sposób intuicyjny. Skoro pojęcie funkcji było zawężone do „ciągłych” i „gładkich”, to nie widać było potrzeby uściślenia tego pojęcia.
- niedostatecznie ściśle pojmowanie *granicy*. Pojęcie granicy było opisywane przez analogię, przez odwoływanie się do mechanistycznych i geometrycznych przykładów; często z użyciem pojęć, które – przy dzisiejszym rozumieniu problemu – nie mają nic do rzeczy, np. czas, zbliżanie.

Do końca XVIII wieku rachunek różniczkowy nie dopracował się uzasadnienia swoich podstaw i nie przekształcił się we właściwy system pojęciowy. Co nie znaczy, że się nie rozwijał. Rozwój teorii rachunek różniczkowy zawdzięcza rozszerzaniu się pola zastosowań w geometrii, mechanice, astronomii, jak również w teorii ciepła. (Wyjątkową rolę w pojęciowym wzbogaceniu analizy odegrały próby matematycznego opisu „drgającej struny”).

Jednym z doniosłych efektów stosowania rachunku różniczkowego było uświadomienie sobie przez matematyków tamtego okresu, że pojęcie funkcji nie jest tożsame z analitycznym wyrażeniem wiążącym zmienną, albowiem jednej funkcji może odpowiadać kilka analitycznych wyrażen w przypadku, gdy jest ona „zespoleniem” oddzielnych, „niezależnych” od siebie kawałków. Badania takich funkcji doprowadziły do bardziej ścisłych analiz takich pojęć, jak: funkcja, ciągłość, granica. Dzięki temu matematycy na początku XIX wieku porzucili wiele wcześniejszych filozoficznych i metodologicznych przekonań. Jasne stało się, że analiza winna być uzasadniana na bazie ogólnej teorii wielkości, bez odwoływania się do intuicji mechanistycznych czy geometrycznych. To podejście najpełniej na początku XIX wieku wyraził Cauchy. Definicja granicy podana przez Cauchy’ego pozwoliła w naturalny sposób podejść do podstawowych pojęć rachunku różniczkowego, a tym samym wypracować jego logiczne podstawy. Cauchy *nie* uściślił po prostu treściowego pojmowania granicy, ale określił je formalnie. Wprowadził je jako pojęcie operacyjne, pozwalające rozpatrywać istnienie granicy w przypadkach wykraczających poza oczywistość. W rezultacie rachunek różniczkowy uzyskał wymaganą ścisłość i nie potrzebował zewnętrznego czy metafizycznego uzasadniania wyjściowych zasad. Analityczne metody Cauchy’ego były ustanowieniem nowych standardów ścisłości w analizie matematycznej.

Cauchy opierając się na pojęciu granicy, osiągnął cel uzasadnienia analizy, kończąc kryzys podstaw analizy trwający przez sto lat. Jednakże wkrótce okazało się, że w pewnym sensie rozwiązanie to jest niedostateczne i sprzeczne. Przy

wykładzie *teorii granic* jako bazy dla analizy matematycznej Cauchy oparł się na pojęciu liczby rzeczywistej. Równocześnie traktował on liczbę niewymierną jako *granicę* ciągu liczb wymiernych. Aby wyjść poza to błędne koło, należało inaczej – bez odwołania się do pojęcia granicy – wprowadzić pojęcie liczby rzeczywistej i uzasadnić jej właściwości.

Od dawna było wiadomo, że dla ścisłego dowiedzenia szeregu twierdzeń wewnątrz analizy matematycznej wymagane jest dopuszczenie pojęcia zbioru zawierającego „od razu” wszystkie swoje elementy, tzn. aktualnej nieskończoności. Fakt ten zauważył Bolzano przy analizie twierdzenia o istnieniu górnej granicy zbioru ograniczonego. Bolzano pokazał, że operowanie zbiorami nieskończonymi wymaga zasadniczo innych praw i reguł niż te, do których przywykliśmy w arytmetyce. Nowe fakty matematyczne wymagają nowych rozwiązań przy uzasadnianiu podstaw analizy matematycznej i matematyki jako całości. Problem polegał na tym, aby:

- a) uzasadnić pojęcie liczby rzeczywistej bez odwoływania się do pojęcia granicy;
- b) ściśle uzasadnić te działy analizy, gdzie wykorzystuje się pojęcie aktualnej nieskończoności.

Pierwsze zadanie rozwiązał w 70. latach XIX wieku Dedekind swoją teorią przekrojów. Nieco później Cantor stworzył teorię liczb pozaskończonych, która nie tylko ustalała prawa operowania zbiorami nieskończonymi, ale dawała także pełną teorię liczb rzeczywistych.

Cantorowska teoria przyjęta była z nieufnością, gdyż pojęcie aktualnej nieskończoności uważane było za całkowicie oderwane od rzeczywistości i z tego powodu uznawane za twór całkowicie sztuczny i pozbawiony zastosowań. Jednakże już w końcu XIX wieku pojawiło się sporo prac wykorzystujących teorię mnogości. Matematyka zaczęła przyjmować teoriomnogościową postać, a uzasadnianie matematyki zaczęto opierać na pojęciach teorii mnogości jako najbardziej fundamentalnych. Jednak wkrótce ponownie pojawiła się sytuacja kryzysowa.

Niedoszły triumf teorii mnogości przerwały odkryte na początku XX wieku paradoksy związane z pojęciem zbioru. Do najbardziej znanych należą: paradoks Cantora, paradoks Russella-Zermelo i paradoks Richarda.

Pierwszy (paradoks Cantora) związany jest z pojęciem zbioru wszystkich zbiorów. Zgodnie z udowodnionym przez Cantora twierdzeniem: *Dla dowolnego zbioru Z zbiór $P(Z)$ – wszystkich podzbiorów zbioru Z – ma moc⁴ większą niż sam zbiór Z .* Jeżeli założymy istnienie zbioru wszystkich zbiorów C , to z definicji jest on największym zbiorem i ma największą moc. Skoro tak, to zbiór podzbiorów C jest w nim zawarty, więc jego moc nie może być większa od mocy C , bo podzbiór zbioru nie może mieć mocy większej niż moc samego zbioru, czyli

⁴ Mówiąc w największym uproszczeniu – pojęcie *mocy* jest dla zbiorów nieskończonych tym, co *liczebność* dla zbiorów skończonych.

$$\text{moc } P(C) \leq \text{moc } C.$$

Stąd otrzymujemy sprzeczność, gdyż na podstawie przytoczonego powyżej twierdzenia

$$\text{moc } P(C) > \text{moc } C^5.$$

Paradoks Russella-Zermelo wskazuje, że „naiwne” pojęcie zbioru związane z przekonaniem, że każdy warunek (cecha) dobrze określa pewien zbiór (obiektów spełniających ten warunek lub obdarzonych tą cechą), prowadzi do trudności. Weźmy pod uwagę własność odnoszącą się do zbiorów: własność *bycia własnym elementem*. Wydaje się, że pewne zbiory posiadają tę własność, a inne nie. Przykładowo *zbiór pojęć abstrakcyjnych* sam jest pojęciem abstrakcyjnym, jest więc swoim elementem, natomiast *zbiór książek* – nie jest książką, więc nie jest swoim elementem. Rozpatrzmy przypadek zbiorów drugiego typu. Niech Z będzie zbiorem tych wszystkich zbiorów, które *nie* są własnymi elementami. Zapytajmy, czy Z jest swoim własnym elementem, tzn. czy $Z \in Z$? Jeśli Z byłby swoim elementem ($Z \in Z$), to na podstawie definicji zbioru Z musiałby być zbiorem, który *nie* jest swoim elementem ($Z \notin Z$). Gdyby z kolei przyjąć, że Z nie jest swoim elementem ($Z \notin Z$), to również w oparciu o wcześniejsze ustalenia powinien znaleźć się wśród zbiorów, które obdarzone są cechą *bycia własnymi elementami* ($Z \in Z$). Paradoks ten pokazuje, że intuicyjne pojęcie zbioru prowadzi do sprzeczności i wymaga sprecyzowania⁶.

Paradoks Richarda jest o tyle istotny, że na strukturze jego rozumowania wzorował się Gödel, dowodząc swego twierdzenia: *jeżeli arytmetyka jest niesprzeczna, to jest niezupełna*. Weźmy pod uwagę pewien język naturalny, w którym można wyrazić arytmetyczne własności liczb. Każda taka definicja zawiera tylko skończoną liczbę słów, a zatem i skończoną liczbę liter alfabetu. Wszystkie te definicje „porządkujemy”, ustawiając je w ciąg, biorąc pod uwagę liczbę liter; w przypadku, gdy jest ta sama liczba liter, to decyduje porządek alfabetyczny. Każdej definicji przyporządkowujemy liczbę naturalną – jej numer porządkowy. Jeśli taka liczba *nie* posiada własności określonej przez odpowiadającą jej definicję, to nazwiemy ją *liczbą richardowską*. Ogólnie rzecz ujmując, powyższe zdanie jest również określeniem własności liczby. *Liczba jest richardowska, gdy nie posiada własności określonej przez definicję, której jest przyporządkowana*. Określenie liczby richardowskiej jako określenie pewnej własności liczb również powinno znaleźć „swoje miejsce” wśród definicji ustawionych w ciąg, a więc ma przypisaną pewną liczbę jako swój numer. Przyjmijmy, że jest to liczba m . Postawmy teraz pytanie:

⁵ Logika formalna. Zarys encyklopedyczny, pod red. W. Marciszewskiego, Warszawa 1987, Wydawnictwo PWN, s. 175.

⁶ Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki*, Warszawa 1995, Wydawnictwo PWN, s. 87 (przypis 4).

czy m jest liczbą richardowską? Powstaje sprzeczność – przyjmując, że m nie jest richardowska (posiada własność opisywaną „swoją” definicją), otrzymujemy wniosek, że jest liczbą richardowską (zgodnie z określeniem), natomiast z przypuszczenia, że m jest richardowska, wynika, że nie jest (ponieważ nie ma własności, którą opisuje definicja, której jest przyporządkowana). Mówiąc krótko, m jest richardowska wtedy i tylko wtedy, gdy m nie jest richardowska⁷.

Dwie pierwsze z przytoczonych tu antynomii zachwiały podstawami teorii Cantora. Matematycy uporali się z tym problemem stosunkowo szybko, proponując różnorodne metody.

Russell starał się wyeliminować antynomie, budując teorię stopni logicznych (teorię typów). Istota tej teorii polega na tym, że wypowiedzi matematyczne dzieli się na klasy odpowiednio do obszaru określenia. Weźmy pewną dziedzinę obiektów: $a, b, c, \dots$ itd. Do pierwszego typu należą wypowiedzi o własnościach tych obiektów: $f(a), g(b), h(c), \dots$ itd. Do drugiego typu należą wypowiedzi o własnościach tych własności: $F(f), G(g), H(h), \dots$ itd. Podstawowa zasada teorii typów głosi, że każdy predykat odnosi się tylko do określonego typu i może być stosowany tylko do obiektów o „oczko” niżej stojących w hierarchii typów. Wyrażenia $f(a)$ lub $F(g)$ są prawdziwe bądź fałszywe, ale wyrażenia $f(F), f(g), g(g)$ – są ani prawdziwe, ani fałszywe, są po prostu bezsensowne. Paradoxs Cantora jest wyeliminowany dlatego, że samo pojęcie zbioru wszystkich zbiorów (bez określenia stopnia) jest nieprawidłowe. Podobnie jest z pojęciem zbioru wszystkich zbiorów, które nie są swoimi elementami (nazwijmy je normalnymi). Możemy mówić o zbiorach normalnych tylko określonego stopnia. Ale zbiór składający się ze wszystkich zbiorów normalnych stopnia n -tego jest już obiektem stopnia $n+1$. Wypowiedzi o tym, czy należy on czy nie do klasy wyjściowych zbiorów, są nieuprawnione (bezsensowne), albowiem oparte są na pomieszaniu typów.

Inne rozwiązanie zaproponował Ernst Zermelo w swojej aksjomatyce teorii mnogości. Odrzucił on przekonanie, że dla każdej niesprzecznej własności istnieje zbiór tych i tylko tych obiektów, które są obdarzone tą własnością. To właśnie dlatego można było rozważać takie „twory”, jak: zbiór wszystkich zbiorów czy też zbiór wszystkich zbiorów niebędących swymi własnymi elementami, które to zbiory prowadziły do antynomii. Zermelo wprowadził „ograniczenie”. Zgodnie z nim, dla dowolnej danej własności (wyrażonej w języku teorii mnogości) istnieje zbiór wszystkich tych i tylko tych obiektów, które spełniają tę własność, ale obiekty te wolno „brać” tylko z istniejącego już jakiegoś ustalonego zbioru. To eliminuje możliwość powstawania zbiorów „antynomiogennych”.

Do lat pięćdziesiątych XX wieku większą popularnością cieszyło się ujęcie teorii mnogości w ramach teorii typów. Później ujęciem standardowym stało się

⁷ Por. E. Nagel, J.R. Newman, *Twierdzenie Gödla*, Warszawa 1966, Wydawnictwo PAN, s. 47–49.

ujęcie aksjomatyczne Zermelo z ulepszeniami Abrahama A. Fraenkla – tzw. system Zermela-Fraenkla ZF⁸.

Stale rosnące znaczenie teorii mnogości jako teorii bazowej matematyki sprawiło, że ujawnienie paradoksów związanych z pojęciem zbioru zmieniło problem podstaw matematyki z teoretycznego w problem filozoficzny. W wąskim sensie chodziło o znalezienie sposobów uniknięcia paradoksów, natomiast w szerszym planie pojawiło się pytanie: czy matematyka może wypracować kiedykolwiek pełne uzasadnienie swoich teorii? Na początku XX wieku panowało silne przekonanie o możliwości absolutnego uzasadnienia matematyki, dlatego przedstawiane programy uniknięcia lub wyeliminowania paradoksów były jednocześnie traktowane jako propozycje uzasadnienia matematyki w ogólności. Próby takie podjęły szkoły *logicyzmu* (sprowadzenie matematyki do „bezpiecznej” podstawy logicznej), *formalizmu* (wykazanie w sposób „absolutny” niesprzeczności matematyki przez analizę teorii matematycznych potraktowanych jako niezinterpretowane rachunki) i *intuicjonizmu* (oparcie matematyki na intuicyjnych pojęciach i oczywistych regułach wywodu).

Żaden z wyżej wymienionych programów uzasadniania matematyki nie spełnił pokładanych w nim nadziei, co nie oznacza, że poniesiono fiasko na wszystkich „frontach”. Pomimo że filozoficzne cele wymienionych szkół nie zostały osiągnięte, ich działalność miała istotny wpływ na rozszerzenie naszej wiedzy o matematyce i uświadomienie sobie założeń i przesłanek, które przyjmujemy, rozwijając matematykę.

⁸ Por. R. Murawski, dz. cyt., s. 171–172, 174.

The Background and Significance of ‘Crises’ in the Foundations of Mathematics

Key Words: *development of mathematics, contradiction, foundations of mathematics, incommensurability, infinitesimals, actually infinite sets*

The watersheds in the development of mathematics that lay bare the ambiguities and contradictions among its very basic notions and conceptions are commonly described as ‘crises’ in mathematics. They coincide with periods of intense mathematical research, often inspired by philosophical doctrines which help to clarify the notions and methods with the use of which many fundamental theorems are proved. The paper presents three best known and most widely discussed crises in the foundations of mathematics, reviews the causes of their appearance and discusses the difficulties that they have led to as well as possible ways of their resolution. The three crises arose in connection with the discovery of the incommensurable line segments in the Pythagorean School, in connection with the operations on the infinitesimals by the creators of the differential calculus (17th–18th centuries) and with respect to the foundations of mathematics connected with operations on the actually infinite sets (19th and 20th centuries).